**14 - Дәріс**

***Тақырыбы:*** **Функциялық тізбектер мен қатарларды мүшелеп интегралдау. Функциялық тізбектер мен қатарларды мүшелеп дифференциалдау.**

**Функциялық тізбектерді және функциялық қатарларды мүшелеп интегралдау.**

1-Теорема. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $f(x)$ шектік функцияға бірқалыпты жинақты және тізбектің әрбір $f_n(x)$ мүшесі $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын болса , онда $f(x)$ шектік функция да $[a,b]$ кесіндісінде интегралданады және тізбекті $[a,b]$ кесіндісінде мүшелеп интегралдауға болады, яғни

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

шегі бар және ол $\int_a^b f(x)dx$ интегралына тең.

Дәлелдеу. $\{f_n(x)\}$ тізбегі $[a,b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақты болғандықтан, кез келген $\varepsilon>0$ санына сәйкес $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n\geq N(\varepsilon)$ және барлық $x\in[a,b]$ үшін

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (1)$$

Енді $f(x)$ шектік функциясының $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатынын көрсетейік. $[a,b]$ кесіндісіне $a=x_0\prec x_1\prec\ldots\prec x_m=b$ нүктелері арқылы бөлшектеу жасап $W_k(f)$ және $W_k(f_n)$ символдары арқылы $f(x)$ және $f_n(x)$ функцияларының $[x_{k-1}, x_k]$ $k=1,\ldots,m$ дербес сегменттеріндегі сәйкестерін белгілейік. Егер $x', x''\in[a,b]$ болса, онда

$$|f(x')-f(x'')|\leq|f(x')-f_n(x')|+|f_n(x')-f_n(x'')|+|f_n(x'')-f(x'')| \qquad (2)$$

Ал (1) бойынша $\varepsilon>0\ \exists n\ \forall x\in[a,b]$

$$|f(x')-f_n(x')|+|f_n(x'')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

демек, (2) бойынша

$$|f(x')-f(x'')|\leq|f_n(x')-f_n(x'')|+\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Мұнан және $x', x''$ нүктелері кез келген болғандықтан, таңдап алынған n үшін кез келген $\varepsilon>0$ саны мен әрбір $k=1,\ldots,m$ нөміріне сәйкес

$$W_k(f)\leq W_k(f_n)+\frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (3)$$

Біздің бөлшектеуімізге сәйкес $f(x)$ функциясының жоғарғы және төменгі қосындыларын S және s, ал $f_n(x)$ функциясының жоғарғы және төменгі қосындыларына сәйкес $S_n$ және $s_n$ арқылы белгілейік. Сөйтіп (3) теңсіздікті к-ші дербес сегмент $\Delta x_k$ ұзындығына көбейтіп, барлық $k=1,\ldots,m$ арқылы қосындыласақ,

$$S-s\leq S_n-s_n+\varepsilon \qquad (4)$$

теңсіздігін аламыз. Теорема шарты бойынша $[a,b]$ кесіндісінде $f_n(x)$ интегралданады, яғни $S_n-s_n<\varepsilon$, онда (4) теңсіздіктен $S-s<2\varepsilon$, демек, $[a,b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы интегралданады.

Интеграл бағалаулары мен $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісінде интегралдануы және (1) теңсіздіктен

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \qquad \forall n \ge N(\varepsilon)$$

аламыз. Бұдан $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$ шегінің бар және оның $\int_a^b f(x)dx$ интегралына тең екенін аламыз. Теорема дәлелденді.

Бұл теореманы функциялық қатар үшін былай айтамыз: егер (20) функциялық қатар өзінің S($x$) қосындысына $[a,b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты және оның әрбір $U_k(x)$ мүшесі $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын болса, онда S($x$) қосындысы $[a,b]$ кесіндісінде интегралданады, әрі қатарды $[a,b]$ кесіндісінде мүшелеп интегралдауға болады, яғни

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b U_k(x)dx$$

жинақты және оның қосындысы $\int_a^b S(x)dx$.

**Мүшелеп дифференциалдау.**

1-Теорема. Егер $[a,b]$ кесіндісінде әрбір $f_n(x)$ функциясының $f_n'(x)$ туындысы бар және бұл $\{f_n'(x)\}$ туындылар тізбегі $[a,b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты, ал $\{f_n(x)\}$тізбегі $[a,b]$ кесіндісінің ең болмағанда бір $x_0$ нүктесінде жинақты болса,онда $\{f_n(x)\}$ тізбегі белгілі бір $f(x)$ шектік функциясына бүкіл $[a,b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты әрі бұл тізбекті мүшелеп дифференциалдауға болады, яғни бүкіл $[a,b]$ кесіндісінде $f(x)$ шектік функциясының $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбегінің шегі болатын $f'(x)$ туындысы бар.

Дәлелдеу. Ең алдымен $\{f_n(x)\}$ тізбегінің $[a,b]$ сегментінде бірқалыпты жинақты екенін дәлелдейік. $\{f_n(x)\}$ тізбегінің $x_0\in[a,b]$ нүктесінде жинақтылығы мен $\{f_n'(x)\}$ тізбегінің $[a,b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақтылығынан

$$\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n\ge N(\varepsilon)\ \ \forall p\in \mathbb{N}\ \ \left(|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\wedge$$

$$\left(|f'_{n+p}(x)-f'_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\ \forall x\in[a,b]\right) \qquad (5)$$

Айталық $x[a,b]$ кесіндісінің кез келген нүктесі болсын. Онда барлық n, p$\in$N нөмірлерінде $f_{n+p}(t)$-$f_n(t)$ функциясы $[x_0,x]$ кесіндісінде Лагранж теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады, сондықтан $[x_0,x]$ кесіндісінен $\xi$ нүктесі табылып

$$[f_{n+p}(x)-f_n(x)]-[f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)]=[f_{n+p}'(\xi)-f_n'(\xi)](x-x_0)$$

теңдігі орындалады. Енді $|x-x_0|\le b-a$ болғандықтан, мұнан және (5) теңсіздіктерден

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon\ \forall x\in[a,b]\ \forall n\ge N(\varepsilon)\ \ \forall p\in \mathbb{N}.$$

Ал бұл Коши критерийі бойынша $\{f_n(x)\}$ тізбегінің $[a,b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты екенін көрсетеді. Оның шектік функциясын $f(x)$ арқылы белгілейік.

Енді бізге $[a,b]$ кесіндісінің кез келген $x_0$ нүктесінде $f(x)$ функциясының туындысының бар және ол туынды $\{f_n'(x)\}$ тізбегінің шегі екенін көрсету қалды.

Ол үшін $x_0$ нүктесінің $\cup_\delta(x_0)\subset[a,b]$ болатындай δ маңайын аламыз (егер $x_0$ шеткі нүкте, мысалы $x_0=a$ болса, онда маңай үшін $[a,a+\delta)$ жарты маңайын аламыз).

$\{\Delta x\}$ арқылы $0<|\Delta x|<\delta$ (егер $a<x_0<b$ болса ), $0<\Delta x<\delta$ (егер $x_0=a$ болса ), $-\delta<\Delta x<0$ (егер $x_0=l$ болса ) шарттарын қанағаттандыратын барлық $\Delta x$ сандар жиынын белгілейміз және $\Delta x$ аргументінің функциялар тізбегі

$$\varphi_n(\Delta x)=\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}$$

осы $\{\Delta x\}$ жиынында бірқалыпты жинақталатынын дәлелдейміз.
$\{f_n'(x)\}$ тізбегінің бірқалыпты жинақтылығынан
$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n\geq N\ \ \forall p\in N \forall x\in[a,b]\ \ (|f'_{n+p}(x)-f'_n(x)|<\varepsilon)$
$\{\Delta x\}$ жиынынан $\Delta x$ алып $[x_0, x_0+\Delta x]$ сегментінде $f_{n+p}(t)-f_n(t)$ функциясына Лагранж теоремасын қолдансақ , $\theta\in(0,1)$ саны табылып,

$$\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)=\frac{\left[\ f_{n+p}(x_0+\Delta x)-f_n(x_0+\Delta x)\ \right]-\left\lfloor f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)\right\rfloor}{\Delta x}=$$

$=f_{n+p}'(x_0+\theta\Delta x)-f_n'(x_0+\theta\Delta x)$
Бұған (31) теңсіздікті қолдансақ

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)|<\varepsilon \forall \Delta x\in\{\Delta x\} \forall n\geq N(\varepsilon)\ \ \forall p\in N.$$

Сонымен, Коши критерийі бойынша, бұл $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ тізбегі $\{\Delta x\}$ жиынында бірқалыпты жинақты.

Ал бұл $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ тізбегіне $\Delta x=0$ нүктесінде мүшелеп шекке көшу теоремасын пайдалануға мүмкіндік береді. Демек, § 4, 1-теорема бойынша $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ тізбегінің шектік функциясы болатын

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

функциясының $\Delta x$ нөлге ұмтылғанда шектік мәні бар және

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\Delta x)]=\lim_{n\to\infty}[\lim_{\Delta x\to 0}\varphi_n(\Delta x)]==\lim_{n\to\infty}[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}f_n'(x_0)$$

Бұл $f(x_0)$ функциясының $x_0$ нүктесінде туындысы бар және ол $\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x_0)$ екенін дәлелдейді. Теорема дәлелденді.

Осы теореманың функциялық қатар термині арқылы айтылуын келтірейік: егер әрбір $U_k(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісінде туындысы бар және $\sum\limits_{k=1}^{\infty}U_k{}'(x)$ қатары $[a,b]$ сегментінде бірқалыпты жинақты, ал $\sum\limits_{k=1}^{\infty}U_k(x)$ қатары $[a,b]$ кесіндісінің ең болмағанда бір нүктесінде жинақты болса, онда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}U_k(x)$ қатары $S(x)$ қосындысына бүкіл $[a,b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты әрі бұл қатарды $[a,b]$ кесіндісінде мүшелеп дифференциалдауға болады, яғни $S(x)$ қосындысының $[a,b]$ кесіндісінде туындылардан түзілген қатар $\sum\limits_{k=1}^{\infty}U_k{}'(x)$ қосындысына тең туындысы бар.

1-Ескерту. 1-теоремада $[a,b]$ кесіндісінде $f_n(x)$ функцияларының туындысының ғана бар екені ұйғарылды. Оның шектеулілігі, интегралдануы немесе осы туындылардың үзіліссіздігі

туралы әңгіме жоқ. 1-теореманы математикалық анализ оқулықтарында, әдетте, $[a, b]$ кесіндісінде $f_n'(x)$ туындысын үзіліссіз деп дәлелдейді.
2-Ескерту. Егер 1-теоремада $f_n'(x)$ туындысының $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз деп алсақ, онда § 4, 2-теоремасы бойынша $f(x)$ шектік функциясының да туындысы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз.
3-Ескерту. 1- теореманы m айнымалылардың функциялары үшін былай айтады: егер әрбір $f_n(x) = f_n(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияларының $R^m$ кеңістігінің шектеулі G жиынында $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$ дербес туындылары бар және $\{\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\}$ тізбегі G жиынында бірқалыпты жинақты, ал $\{f_n(x)\}$ тізбегі G жиынының әрбір нүктесінде жинақты болса, онда $\{f_n(x)\}$ тізбегін G жиынында $x_к$ айнымалысы арқылы мүшелеп дифференциалдауға болады.
2-Теорема. Егер әрбір $f_n(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісінде алғашқы функциясы бар және $\{f_n(x)\}$ функциясы шектік $f(x)$ функциясына $[a, b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты болса, онда шектік $f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісінде алғашқы функциясы бар. Сонымен бірге, егер $x_0 [a, b]$ кесіндісінің кез келген нүктесі болса, онда $f_n(x)$ функциясының $\varphi_n(x_0)=0$ шартын қанағаттандыратын $\varphi_n(x)$ алғашқы функциялар тізбегі $[a, b]$ кесіндісінде $\varphi(x_0)=0$ шартын қанағаттандыратын шектік $f(x)$ функциясының алғашқы $\varphi(x)$ функциясына бірқалыпты жинақты.
Дәлелдеу. үшін $\Phi_n(x_0)=0$ шартын қанағаттандыратын $\varphi_n(x)$ алғашқы функциялар тізбегі үшін 1-теореманың барлық шарттарының орындалған екенін көреміз. Бұл $\{\Phi_n(x)\}$ тізбегінің $\Phi(x)$ шектік функцияға $[a, b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты екенін қамтамасыз етеді. Әрі $\Phi(x)$ шектік функциясының $[a, b]$ кесіндісінде $\{f_n(x)\}$ тізбегінің $f(x)$ шектік функциясына тең туындысы бар. Теорема дәлелденді.
4-Ескерту. Біз 2-теоремада $f_n(x)$ функцияларын $[a, b]$ кесіндісінде шектеулі деп те, интегралданады деп те есептегеніміз жоқ.
Қорытынды. Бірқалыпты жинақтылық шектік мәні бар функциялар класынан, үзіліссіз функциялар класынан, интегралданатын функциялар класынан, алғашқы функциясы бар класынан және, егер туындылар тізбегі де бірқалыпты жинақты болса, онда дифференциалданатын функциялар класынан да шығармайды.

Мысал. $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ функциясының туындысы $\varphi'(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} + 2x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ функциясы $x=0$ нүктесінде үзілісті де қалған барлық нүктелерде үзіліссіз. [0,1] кесіндісінің барлық рационал нүктелерін тізбектей $x_1, x_2, ...., x_k, ...$ нөмірлеп шығып, $U_k(x) = \frac{1}{k^2}\varphi(x - x_k)$ деп алайық. Онда $U_k'(x) = \frac{1}{k^2}\varphi'(x - x_k)$ туындысы бір ғана $x_к$ нүктесінде үзілісті де қалған нүктелерде үзіліссіз. Ал [0,1] кесіндісінің барлық нүктелерінде

$|\ U_k(x)\ | \le \frac{|x-x_k|^2}{k^2} \le \frac{1}{k^2}$, $|\ U_k{}'(x)\ | \le \frac{1+2|x-x_k|}{k^2} \le \frac{3}{k^2}$ болғандықтан $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ және $\sum_{k=1}^{\infty} U_k{}'(x)$ қатарлары $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2}$ жинақты қатарымен мажорланады, сондықтан [0,1] сегментінде бірқалыпты жинақты. 2- теорема бойынша $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ қатарының қосындысы $f(x)$ функциясының [0,1] сегментінде $\sum_{k=1}^{\infty} U_k{}'(x)$ қатарының қосындысына тең болатын $f'(x)$ туындысы бар және әрбір $x_к$, к=1,2,..., нүктесінде үзілісті.